



# **Guide d'utilisation des méthodes visuelles pour l'analyse des crues conjointes par copule**

1<sup>er</sup> Livrable du LOT3  
Juillet 2022

# Guide d'utilisation des méthodes visuelles pour l'analyse des crues conjointes par copule

**1<sup>er</sup> Livrable du LOT3**  
**Juillet 2022**

## **ÉQUIPE DE RÉALISATION :**

Mohammad Bizhanimanzar, Ouranos  
Gabriel Rondeau-Genesse, Ouranos  
Louis-Philippe Caron, Ouranos

**Titre du projet Ouranos:** Estimation des surcotes et du rehaussement marin aux exutoires des rivières situées dans le tronçon maritime du Saint-Laurent (estuaire et golfe du Saint-Laurent)

**Numéro du projet Ouranos:** 705300

**Citation suggérée :** Bizhanimanzar,M., Rondeau-Genesse,G., Caron,L.P., (2022). *Guide d'utilisation des méthodes visuelles pour l'analyse des crues conjointes par copule*. Rapport présenté à Direction de l'expertise hydrique du ministère de l'Environnement et de la Lutte contre les changements climatiques. 21 p. + annexe.

---

Les résultats et opinions présentés dans cette publication sont entièrement la responsabilité des auteurs et n'engagent pas Ouranos ni ses membres. Toute utilisation ultérieure du document sera au seul risque de l'utilisateur sans la responsabilité ou la poursuite juridique des auteurs.

# TABLE DES MATIÈRES

---

Table des matières.....	ii
Liste des figures .....	i
Liste des tableaux.....	i
Liste des abréviations, sigles et acronymes.....	ii
Résumé.....	3
<b>1. Introduction.....</b>	<b>4</b>
<b>2. Méthodes visuelles pour la sélection de la meilleure fonction de copules .....</b>	<b>7</b>
2.1 Nuage de pseudo-observations .....	9
2.2 Le diagramme de Kendall .....	10
2.3 Le diagramme de Chi.....	13
2.4 Discussion .....	16
<b>3. structure du fichier de résultats.....</b>	<b>18</b>
Références .....	19
Annexe A .....	20

# LISTE DES FIGURES

---

Figure 1. L'emplacement des exutoires du LOT3 du projet (cercles bleus), ainsi que des stations marégraphiques (étoiles rouges). .....	5
Figure 2. Les nuages de pseudo-observations correspondant aux exutoires des rivières à Mars et Maskinongé pour la série $Q_{cond}WL$ . L'astérisque (*) indique que la corrélation est statistiquement significative ( $p-value < 0.05$ ). .....	10
Figure 3. Diagrammes de Kendall correspondants à la série $Q_{cond}WL$ pour les exutoires des rivières à Mars et Maskinongé. * indique que la corrélation est statistiquement significative ( $p-value < 0.05$ ). .....	11
Figure 4. Les pseudo-observations pour les copules de type Frank et Plackett d'une série conjointe aléatoire de taille 10 000 avec corrélation Kendall de $T=0.8$ . .....	12
Figure 5. Diagrammes de Chi pour l'ensemble des paires débit-niveau d'eau conjointes (a), ainsi que pour les queues supérieures (b) et inférieures (c) correspondants à la série $Q_{cond}WL$ pour la rivière à Mars. Les traits pointillés horizontaux délimitent la zone de l'hypothèse d'indépendance associée à un niveau de confiance de 95%. ....	15
Figure 6. Semblable à la Figure 5, mais pour la rivière Maskinongé .....	16

# LISTE DES TABLEAUX

---

Tableau 1. Liste des exutoires couverts par le LOT3 du projet, ainsi que de la méthodologie utilisée pour estimer les niveaux d'eau aux différents exutoires.....	6
Tableau 2. Les 5 fonctions de copules les plus appropriées pour le cas de rivière Nicolet (série $Q_{\text{cond}}\text{WL}$ ) selon la métrique CIB. ....	8

# LISTE DES ABRÉVIATIONS, SIGLES ET ACRONYMES

---

<b>DEH</b>	Direction de l'expertise hydrique
<b>MPO</b>	Pêches et Océans Canada
<b>RCP</b>	Representative Concentration Pathway
<b>MhAST</b>	Multihazard Scenario Analysis Toolbox
<b>WL<sub>cond</sub>Q</b>	La série de niveaux d'eau maximums dans un intervalle de $\pm 1$ jour des débits maximums annuels
<b>Q<sub>cond</sub>WL</b>	La série de débits maximums dans un intervalle de $\pm 1$ jour des niveaux maximums annuels
<b>WLRM<sub>cond</sub>Q</b>	La série de niveaux d'eau maximums incluant le rehaussement marin de dans un intervalle de $\pm 1$ jour des débits maximums annuels
<b>Q<sub>cond</sub>WLRM</b>	La série de débits maximums annuels dans un intervalle de $\pm 1$ jour des niveaux d'eau maximums avec rehaussement marin

# Résumé

---

Ce document sert de guide technique quant à l'utilisation des copules pour faire l'analyse fréquentielle bivariée (conjointe) d'un exutoire lorsque la crue se produit à la suite de l'occurrence simultanée de débits et de niveaux d'eau élevés (ou extrêmes). La librairie MhAST (*Multi-hazard Assessment and Scenario Toolbox*) (Sadegh et al., 2018) est de nouveau choisie pour l'analyse des crues conjointes en raison de sa large gamme de modèles de copules (symétriques/asymétriques, extrêmes) permettant son applicabilité dans les situations où la dépendance entre le débit et le niveau d'eau existe dans l'ensemble ou dans seulement une partie de la distribution conjointe. Le rapport détaille l'utilisation d'une version améliorée de cette librairie développée pour le projet (<https://github.com/Bijan55699/compound-flooding/tree/master>), qui inclut désormais, en plus des méthodes numériques, trois méthodes visuelles pour analyser ces paires de débit-niveau d'eau, soit le nuage de pseudo-observations de Tootoonchi et al. (2022) et les diagrammes de Kendall et de Chi. À l'aide d'un exemple basé sur les exutoires des rivières à Mars et Maskinongé, le rapport détaille ces trois méthodes visuelles et décrit comment elles peuvent aider à choisir la fonction de copule appropriée. De plus, les débits et les niveaux d'eau associés aux crues conjointes de 2, 100 et 350 ans aux exutoires des rivières **Maskinongé** et **Nicolet, Ha! Ha!** et à **Mars** en période historique (1968-2020) et future (2070-2100) ont été calculés et accompagnent ce rapport.

# 1. Introduction

---

Ce rapport présente la première partie des résultats de la 3<sup>e</sup> phase du projet d'analyse des crues conjointes aux exutoires des rivières visées par les travaux d'INFO-Crue, de même que l'information nécessaire à leur interprétation. Cette 3<sup>e</sup> phase vise à analyser les crues conjointes à 12 exutoires supplémentaires, soient 11 exutoires dans le tronçon fluvial du fleuve Saint-Laurent de même que l'exutoire de la rivière du Moulin se jetant dans la rivière Saguenay. Le Tableau 1 dresse la liste de tous les exutoires visés par cette dernière phase du projet, tandis que leur emplacement peut être vu à la Figure 1. Plus particulièrement, ce rapport couvre les exutoires des rivières **Maskinongé** et **Nicolet**, de même que les Q-H associés aux crues conjointes de 2, 100 et 350 ans aux exutoires **Ha! Ha!** (LOT2) et à **Mars** (LOT1). Les résultats couvrent les périodes historiques (1968-2020) et futures (2070-2100). La section 2 du rapport fait un bref rappel de la méthodologie utilisée, soit l'approche par copule, et présente des outils pour aider à déterminer la fonction de copule à sélectionner lorsque les copules dépendantes sont utilisées. Cette section présente également un exemple pour aider à illustrer l'utilisation de ces outils. Finalement, la structure des fichiers (données débits-niveau d'eau résultant de l'analyse fréquentielle bivariée) qui accompagnent ce rapport est présentée dans la section 3.



Figure 1. L'emplacement des exutoires du LOT3 du projet (cercles bleus), ainsi que des stations marégraphiques (étoiles rouges).

Tableau 1. Liste des exutoires couverts par le LOT3 du projet, ainsi que de la méthodologie utilisée pour estimer les niveaux d'eau aux différents exutoires.

<b>Rivière</b>	<b>Échéancier</b>	<b>Embouchure</b>	<b>Source de données niveau d'eau</b>
Maskinongé	Juin 2022	Fleuve amont	Simulation par le modèle MPO
Nicolet		Lac Saint-Pierre	Simulation par le modèle MPO
Saint-Maurice	Décembre 2022	Fleuve aval	Simulation par le modèle MPO
Batiscan		Fleuve aval	Simulation par le modèle MPO
du Loup		Lac Saint-Pierre	Simulation par le modèle MPO
Saint-François		Fleuve amont	Simulation par le modèle MPO
Yamaska		Fleuve amont	Simulation par le modèle MPO
Bécancour		Fleuve aval	Simulation par le modèle MPO
Richelieu		Fleuve amont	Simulation par le modèle MPO
Assomption		Embouchure rivière des Prairies	Simulation par le modèle MPO
Chateauguay		Fleuve amont	Station hydrométrique
du Moulin		Rivière Saguenay	À déterminer

## 2. MÉTHODES VISUELLES POUR LA SÉLECTION DE LA MEILLEURE FONCTION DE COPULES

---

La méthodologie utilisée dans ce rapport est la même que celle présentée dans les rapports précédents et repose sur l'utilisation de la copule. La sélection du type de copule utilisée pour faire l'analyse statistique bivariée (indépendante ou dépendante) est basée sur la significativité de la corrélation de Kendall ( $\tau$ ) entre les débits et niveaux d'eau conjoints (séries  $WL_{\text{cond}}Q$  et  $Q_{\text{cond}}WL$ ). Dans le cas où la corrélation ne serait pas statistiquement significative ( $p\text{-value} > 0.05$ ), comme pour l'ensemble des exutoires couverts par les LOTs 1 et 2, l'analyse fréquentielle bivariée repose l'utilisation de la copule indépendante. Par contre, lorsque les corrélations entre les débits et niveaux d'eau conjoints sont significatives ( $p\text{-value} < 0.05$ ), comme c'est le cas pour plusieurs des exutoires de la partie fluviale du St-Laurent, l'utilisation de la copule dépendante est à privilégier. Dans ce deuxième cas, une étape additionnelle visant à déterminer la fonction de copule la plus représentative de la distribution conjointe est nécessaire. Cette fonction de copule est ensuite utilisée dans la production d'isolignes pour les périodes de retour conjointes de 2, 5, 10, 20, 50, 100 et 350 ans, en supposant une occurrence simultanée du débit ET du niveau d'eau élevés (méthodologie « AND », décrite par exemple dans Salvadori & De Michele (2004)). Contrairement aux copules indépendantes, pour lesquelles les différents points le long d'une isoligne donnée sont tous équiprobables, la probabilité d'occurrence varie le long d'une isoligne pour une copule dépendante. Dans ce cas, il est préférable d'utiliser la paire débit-niveau d'eau (Q-H) correspondant à la vraisemblance maximale comme conditions limites à fournir au modèle hydraulique.

Il faut noter que la paire Q-H correspondant à la vraisemblance maximale est basée sur les valeurs optimales des paramètres de la fonction de copule sélectionnée. Comme l'approche d'inférence Bayésienne utilisée dans ce projet calcule la distribution à posteriori des paramètres de la copule, il est possible d'évaluer l'incertitude associée aux paramètres. Cette incertitude est fortement influencée par la longueur temporelle des données; plus la série débit-niveau d'eau conjoint est longue, plus le rang de(s)

paramètre(s) de la fonction de copule et l'incertitude associée à la paire Q-H seront petits (Sadegh et al., 2018).

La détermination de la meilleure fonction de copule (voir Sadegh et al. (2018) pour la liste des fonctions) est une étape critique de l'analyse bivariée lorsque les séries sont corrélées entre elles. Dans le cas du module MhAST, utilisé dans le cadre de ce projet, la sélection de la meilleure fonction de copule est basée par défaut sur une comparaison de la métrique du Critère d'Information Bayésien (CIB) pour lequel la complexité de la fonction et le nombre d'observations sont pris en compte (Sadegh et al., 2018). D'autres métriques tel le Cramér-von Mises (Genest & Favre, 2007; Requena et al., 2013) peuvent aussi être utilisées. Toutefois, ces métriques numériques peuvent fournir des résultats ambigus lorsque plusieurs fonctions obtiennent des scores semblables ou lorsque la fonction identifiée présente des enjeux de convergence pour l'espace de paramètres utilisés<sup>1</sup>. À titre d'exemple, le Tableau 2 présente les valeurs de CIB correspondant aux 5 fonctions de copules les plus appropriées selon MhAST pour l'embouchure de la rivière Nicolet (série  $Q_{condWL}$ ). On constate que les CIB de ces fonctions sont relativement comparables, ce qui signifie qu'il n'existe pas une forte évidence que l'une de ces fonctions devrait être privilégiée au détriment des autres (Raftery, 1995). Par contre, le choix de la fonction aura un impact sur les résultats dû au fait que ces fonctions représentent la dépendance le long de la distribution conjointe différemment; la fonction Galambos sous-entend une plus forte dépendance dans la partie supérieure de la distribution conjointe, alors que la fonction Gaussian est plutôt utilisée lorsque la dépendance se situe principalement dans le milieu de la distribution.

Tableau 2. Les 5 fonctions de copules les plus appropriées pour le cas de rivière Nicolet (série  $Q_{condWL}$ ) selon la métrique CIB.

<i>Rang</i>	<i>Nom de la fonction copule</i>	<i>CIB</i>
1	Gaussian	-443.3
2	Galambos	-443.0
3	BB1	-442.7
4	Gumbel	-442.1
5	Roch-Alegre	-440.6

---

<sup>1</sup> Plus de détails sur la convergence des paramètres seront fournis lors de la démonstration.

Par conséquent, ces métriques quantitatives devraient toujours être accompagnées d'un support visuel pour aider à sélectionner la copule qui représente le mieux la dépendance entre les variables conjointes (Tootoonchi et al., 2022). Trois méthodes graphiques sont régulièrement utilisées dans la littérature, à savoir le nuage de pseudo-observations conjoint, le diagramme de Kendall et le diagramme de Chi (Requena et al., 2013; Tootoonchi et al., 2022). Ces trois techniques ont été intégrées à la version du package MhAST développé pour ce projet (<https://github.com/Bijan55699/compound-flooding/tree/master>) et sont présentées dans les sections suivantes.

## 2.1 Nuage de pseudo-observations

Le nuage de pseudo-observations constitue un premier outil permettant de développer une intuition sur le comportement conjoint des données. La série conjointe de pseudo-observations est définie comme une transformation des distributions marginales des variables conjointes  $X$  et  $Y$  (débit et niveau d'eau dans ce projet) en distributions uniformes  $U$  et  $V$  comme (Tootoonchi et al., 2022) :

$$u_i = \frac{R_{x_i}}{n+1} \text{ et } v_i = \frac{R_{y_i}}{n+1} \quad (\text{éq.1})$$

où  $R_{x_i}$  et  $R_{y_i}$  sont le rangs des variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , respectivement et  $u_i$  et  $v_i$  sont les pseudo-observations correspondants aux distributions uniformes  $U$  et  $V$ . Ce nuage de pseudo-observations peut fournir une représentation visuelle de la corrélation entre les données, mais, plus important encore, les distributions uniformes  $U$  et  $V$  servent de base pour la construction de la copule empirique. Celle-ci est essentiellement la fonction de distribution cumulative conjointe des distributions uniformes de  $U$  et  $V$  (Genest & Favre, 2007). Idéalement, la copule ajustée doit représenter le plus fidèlement possible la dépendance « observée » dans la copule empirique.

La Figure 2 montre le nuage de pseudo-observations de débit-niveau d'eau conjoint pour la période 1968-2020 et la série  $Q_{\text{condWL}}$  (niveaux d'eau maximums annuels et débits maximums dans un intervalle de  $\pm 1$  jour) aux rivières à Mars et Maskinongé. On constate que dans le cas de la rivière à Mars, les points sont répartis aléatoirement, ce qui est cohérent avec la faible corrélation entre les débits et les niveaux d'eau conjoints obtenue par le test de Kendall ( $\tau = 0,02$ ). Ce n'est pas le cas pour la rivière Maskinongé, où la corrélation positive ( $\tau = 0,34$ ) entre les variables conjointes est visuellement apparente.

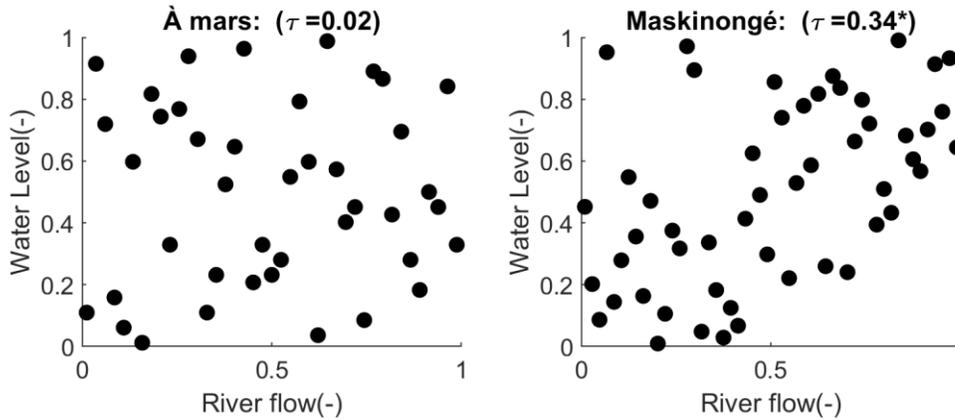


Figure 2. Les nuages de pseudo-observations correspondant aux exutoires des rivières à Mars et Maskinongé pour la série  $Q_{\text{cond}}WL$ . L'astérisque (\*) indique que la corrélation est statistiquement significative ( $p\text{-value} < 0.05$ ).

## 2.2 Le diagramme de Kendall

Le diagramme de Kendall (aussi appelé K-plot), introduit par Genest & Boies (2003) est utilisé pour identifier 1) le signe de la corrélation (positive ou négative) entre les variables et 2) l'importance de la corrélation dans différentes parties de la distribution conjointe (par exemple, dans les extrémités). Le diagramme est basé sur la fonction de distribution de Kendall et relie l'ordre statistique des paires conjointes de débit-niveau d'eau sur l'axe des Y ( $H_i$ ) à l'ordre statistique de ces données calculées sous l'hypothèse d'indépendance sur l'axe des X ( $W_{1:n}$ ). L'ordre statistique d'une paire conjointe de  $(X_i, Y_i)$  est définie comme (Genest & Favre, 2007) :

$$H_i = \frac{1}{n-1} \#\{j \neq i, X_j \leq X_i, Y_j \leq Y_i\} = \frac{nW_{i-1}}{n-1} \quad (\text{éq.2})$$

Où le  $H_i$  est l'ordre statistique du couple  $(X_i, Y_i)$  et l'expression dans l'accolade est le nombre de données pour lesquelles  $X_j \leq X_i$  et  $Y_j \leq Y_i$ .

Ainsi, plus la distance est grande entre les points et la diagonale, plus la dépendance entre les variables conjointes (débits et niveaux d'eau) est forte. La dépendance est positive (négative) si les points se situent au-dessus (en-dessous) de cette diagonale. Les équations des ordres statistiques des données conjointes ( $H_i$ ) et leur valeur attendue sous l'hypothèse d'indépendance ( $W_{1:n}$ ) se trouvent dans Genest & Favre (2007).

Pour illustrer comment le diagramme de Kendall peut être utilisé en pratique, la Figure 3 présente les diagrammes de Kendall correspondant à la période 1968-2020 et la série  $Q_{\text{cond}}\text{WL}$  aux embouchures des rivières à Mars et Maskinongé. On constate que dans le cas de la rivière à Mars, les ordres statistiques des paires débits-niveaux d'eau conjoints (en rouge) sont très près de la diagonale, ce qui confirme de nouveau la faible dépendance ( $\tau = 0,02$ ). Or, dans le cas de la rivière Maskinongé, les observations sont bien au-dessus de la ligne diagonale, ce qui confirme une dépendance positive entre les couples débits-niveaux. On constate également que la dépendance est à son maximum près du centre de la distribution et un peu plus faible à l'extrémité supérieure, alors que l'extrémité inférieure est au contraire très près de la diagonale.

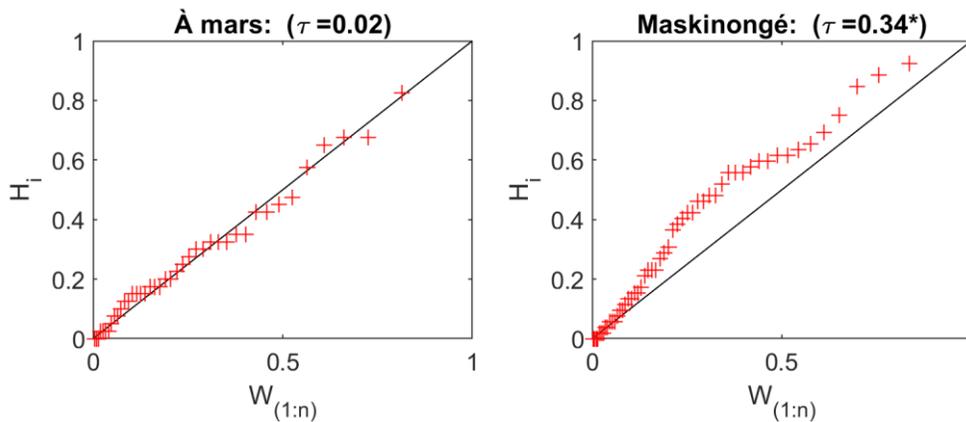


Figure 3. Diagrammes de Kendall correspondants à la série  $Q_{\text{cond}}\text{WL}$  pour les exutoires des rivières à Mars et Maskinongé. \* indique que la corrélation est statistiquement significative ( $p\text{-value} < 0.05$ ).

Ces informations sont utiles pour identifier le type de copule qui représente le mieux la structure de dépendance entre les paires de débits-niveaux d'eau. Par exemple, dans le cas de la rivière Maskinongé, les deux premières fonctions de copule identifiées par MhAST ont un CIB identique et les deux suivantes ont une différence relativement faible avec le meilleur score, ce qui rend ambiguë l'identification de la meilleure fonction (Tableau 3). La copule Plackett, qui arrive au 3<sup>e</sup> rang, est illustrée à la Figure 4b et fait partie de la famille des copules construites pour représenter les cas où il existe une dépendance significative dans la partie inférieure de la distribution conjointe (voir l'annexe A pour une illustration de la forme de cette fonction copule). Le diagramme de Kendall illustre une certaine dépendance dans le centre et la partie supérieure de la distribution pour la rivière Maskinongé (Figure 3), mais non dans la partie inférieure. L'utilisation de

cette copule ne serait donc pas justifiée. Les copules Frank et Nelsen (une version logarithmique de la copule de Frank (Sadegh et al., 2018)), au contraire, sont des copules utilisées lorsqu'il existe une dépendance relativement similaire tout le long de la distribution (voir Figure 4a). Cela s'applique généralement bien aux données de la rivière Maskinongé, d'autant plus que cette symétrie dans la structure de dépendance ne peut pas être rejetée avec un niveau de confiance de 95% (selon un test de symétrie défini par Genest et al. (2011)). Ainsi, considérant que les copules de Frank et de Nelsen ont un BIC identique, l'une ou l'autre de ces copules pourrait être choisie pour la rivière Maskinongé.

Tableau 3. Les 4 premières fonction copules selon la métrique CIB pour le cas de rivière Maskinongé (série  $Q_{cond}WL$ ).

Rang	Nom de la fonction de copule	CIB
1	Frank	-408.07
2	Nelsen	-408.07
3	Plackett	-403.37
4	Gaussian	-400.23

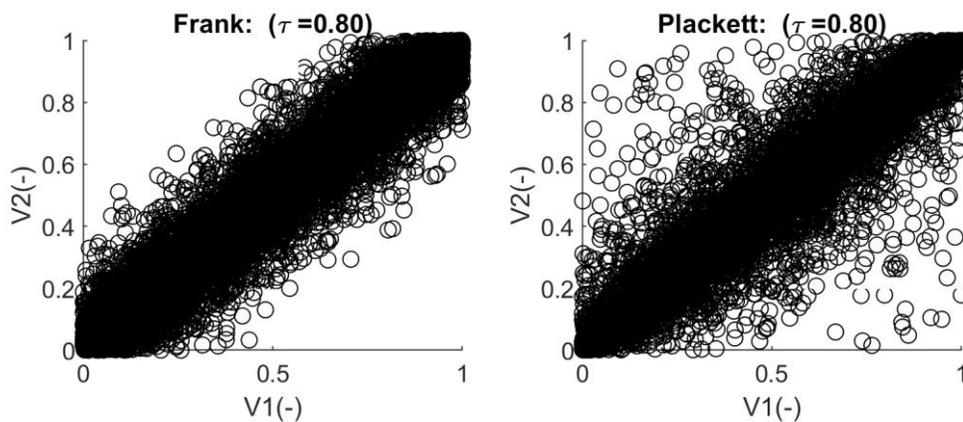


Figure 4. Les pseudo-observations pour les copules de type Frank et Plackett d'une série conjointe aléatoire de taille 10 000 avec corrélation Kendall de  $T=0.8$ .

## 2.3 Le diagramme de Chi

Similaire au diagramme de Kendall, le diagramme de Chi (aussi appelé Chi-plot) est une méthode visuelle utilisée pour déterminer si la dépendance entre les variables conjointes est statistiquement significative, avec notamment la possibilité de mettre l'emphase sur la présence/absence de dépendance dans les queues de la distribution conjointe. Toutefois, cette distinction est faite de façon plus quantitative en utilisant la métrique du  $\chi^2$ .

Pour une série conjointe de  $(X, Y)$ , le diagramme de Chi est construit de la manière suivante (Abberger, 2007):

1. Création des séries de pseudo-observations pour  $X$  et  $Y$  (éq.1).
2. Calcul des paires  $(\lambda_i, \chi_i)$ , pour les paires de pseudo-observations  $(u_i, v_i)$ . Cela donne le diagramme de chi pour l'ensemble de données.
3. Pour quantifier la dépendance dans la queue supérieure de la distribution, les  $(\lambda_i, \chi_i)$  sont calculés seulement pour les points  $(u_i, v_i)$  où  $u_i \geq \bar{U}$  et  $v_i \geq \bar{V}$ .  $\bar{U}$  et  $\bar{V}$  sont les moyennes des distributions uniformes. Pour la queue inférieure, la condition est  $u_i \leq \bar{U}$  et  $v_i \leq \bar{V}$ .
4. Création du diagramme de Chi avec les paires sélectionnées.

À noter que pour les diagrammes de Chi construits spécifiquement pour analyser les queues de distribution, seules les valeurs  $\lambda_i$  positives sont visualisées, afin de mettre en valeur l'absence ou la présence de dépendance dans les queues. Genest & Favre (2007) peut être consulté pour les équations concernant le calcul de  $\lambda$  et  $\chi$ . Concrètement, l'axe des  $X$  ( $\lambda$ ) dans le diagramme de Chi illustre la distance des paires conjointes sélectionnées par rapport au centre de la distribution conjointe (qui se situe à  $\lambda = 0$ ). Plus un point est à droite, plus il représente un extrême conjoint élevé. La position d'un point le long de l'axe des  $Y$  ( $\chi$ ) illustre quant à lui sa déviation par rapport à l'hypothèse d'indépendance. En bref, plus les points se situent loin du côté droit et plus la distance est grande entre ces points et la ligne  $\chi = 0$ , plus l'hypothèse de dépendance entre les extrêmes des variables conjointes est forte. Afin de quantifier cette distance, la région de  $-\frac{c_p}{\sqrt{n}} \leq \chi_i \leq \frac{c_p}{\sqrt{n}}$  (traits horizontaux pointillés sur la Figure 5) est définie pour distinguer la dépendance de l'indépendance, où  $c_p = 1,54, 1,78$  et  $2,18$  est utilisé pour un niveau de confiance à 90%, 95% et 99%, respectivement.

Les diagrammes de Chi pour les rivières à Mars et Maskinongé et la série conjointe  $Q_{\text{cond}}WL$  sont présentés aux Figure 5 et 6, respectivement. On constate que dans le cas de la rivière à Mars, les paires conjointes se situent à l'intérieur de la limite de contrôle (panneau a), soit à l'intérieur des lignes pointillées horizontales, ce qui indique encore une fois que les débits et les niveaux d'eau sont statistiquement indépendants (avec un niveau de confiance de 95%). Pour la rivière Maskinongé, le panneau (a) montre qu'il existe des paires de débit-niveau d'eau en dehors de la limite de contrôle, surtout près du centre de la distribution, mais la corrélation dans la partie supérieure de la distribution (panneau b) n'apparaît pas comme significative, car les paires de débit-niveau d'eau pour  $\lambda$  s'approchant de 1 demeurent majoritairement dans la limite de contrôle. Pour ce qui est la queue inférieure (panneau c), la même conclusion pourrait être faite. Ces résultats viennent en support aux copules de type Frank ou Nelsen, qui n'ont pas spécifiquement de dépendance pour les extrêmes. La copule de type Plackett ne serait probablement pas un choix adéquat pour la rivière Maskinongé à cause de l'absence de dépendance dans la queue inférieure.

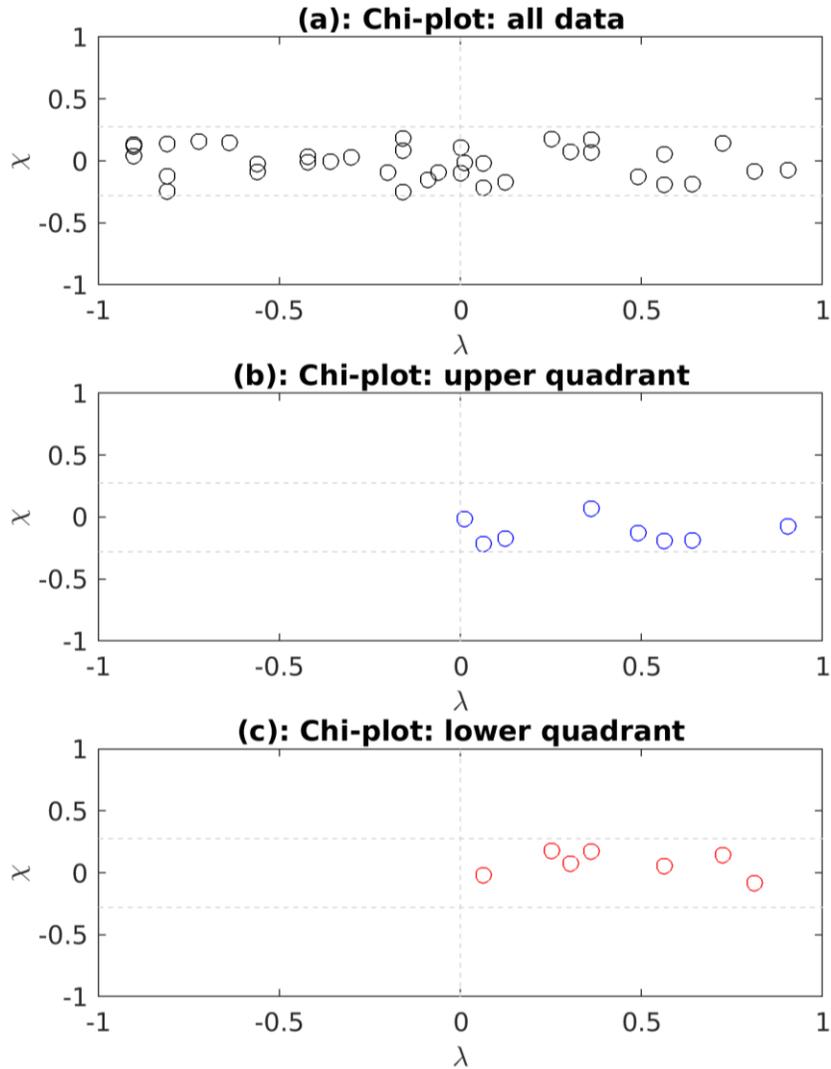


Figure 5. Diagrammes de Chi pour l'ensemble des paires débit-niveau d'eau conjointes (a), ainsi que pour les queues supérieures (b) et inférieures (c) correspondants à la série  $Q_{\text{condWL}}$  pour la rivière à Mars. Les traits pointillés horizontaux délimitent la zone de l'hypothèse d'indépendance associée à un niveau de confiance de 95%.

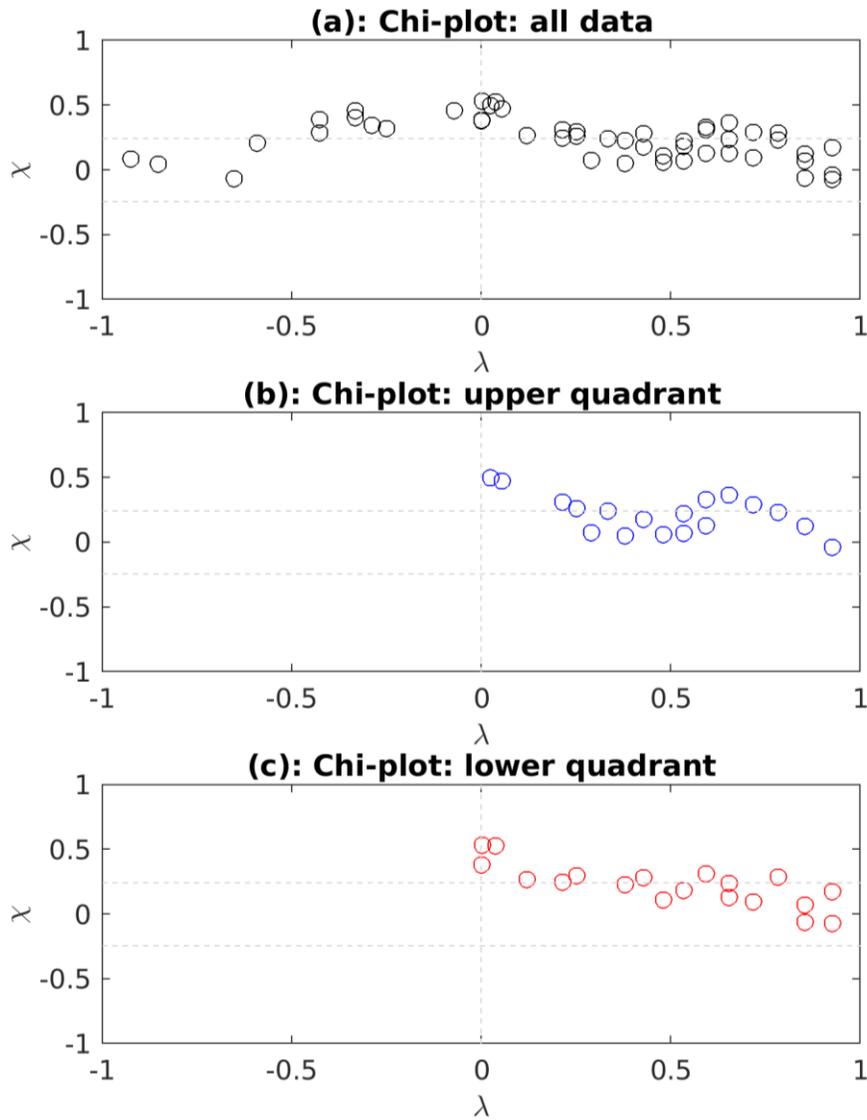


Figure 6. Semblable à la Figure 5, mais pour la rivière Maskinongé

## 2.4 Discussion

Les méthodes visuelles présentées dans cette section fournissent des informations complémentaires aux métriques quantitatives et offrent une meilleure compréhension de la structure de dépendance entre les variables. Elles peuvent accompagner les métriques numériques pour la sélection de la fonction de copule, particulièrement dans les situations où la performance de plusieurs fonctions de copule par ces métriques numériques est similaire et mène à une situation ambiguë.

Pour la rivière à Mars, le nuage de points et les diagrammes de Kendall et de Chi confirment tous l'hypothèse d'indépendance du niveau d'eau et du débit, ce qui justifie l'utilisation de la copule indépendante pour l'analyse fréquentielle bivariée. Pour la rivière Maskinongé par contre, la dépendance (T de Kendall) est statistiquement significative ( $p\text{-value} < 0.05$ ) et plusieurs copules apparaissent comme des choix équivalents. Dans ce cas, les diagrammes de Kendall et de Chi aident à confirmer l'absence d'une dépendance significative sur la partie inférieure de la distribution, ce qui permet d'écarter la copule de Plackett et de confirmer que les copules de Frank et de Nelsen peuvent adéquatement représenter la structure de dépendance et devraient par conséquent être choisies pour une analyse fréquentielle bivariée. À noter que les débits-niveaux d'eau associés à la période de retour conjointe de 100 ans des copules Frank et Nelsen sont pratiquement identiques (Frank:  $Q=204$  H = 6.95 m, Nelsen:  $Q= 204.94$  m<sup>3</sup>/s, H = 6.95 m).

### 3. STRUCTURE DU FICHER DE RÉSULTATS

Les résultats de l'analyse fréquentielle univariée et bivariée (pour 2, 100 et 350 ans) effectuée à chacun des exutoires sont formatés dans un fichier *.mat* suivant la nomenclature *période\_serie\_nom-de-l'exutoire.mat* où période = {historique, futur} et série = {WLcondQ, QcondWL}.

Une description détaillée de la structure :

```

---period -----> {historic, future}
---Univariate
  |--serie -----> {WLcondQ, QcondWL}
  |--Q -----> La distribution ajustée (débit)
  |--H -----> La distribution ajustée (niveau d'eau)
  |--Q_Paramci -----> L'intervalle de confiance (95%) de(s) paramètre(s) de la distribution ajustée
  |--H_Paramci -----> L'intervalle de confiance (95%) de(s) paramètre(s) de la distribution ajustée
  |--RPH_Values -----> une matrice 3*7 contenant le niveau d'eau de 2, 5, 10, 20, 50, 100 et 350 ans associés
aux 5e (1er ligne), 50e (2e ligne) et 95e (3e ligne) percentiles
  |--RPQ_Values -----> une matrice 3*7 contenant le débit de 2, 5, 10, 20, 50, 100 et 350 ans associés aux 5e
(1er ligne), 50e (2e ligne) et 95e (3e ligne) percentiles
  |--RPQ_Names -----> {Q2, Q5, Q10, Q20, Q50, Q100, Q350}
  |--RPH_Names -----> {H2, H5, H10, H20, H50, H100, H350}
---Bivariate
  |--CopulaType -----> {Dépendant, Indépendant}
  |--serie -----> {WLcondQ, QcondWL}
  |--DesVarValues
  |   |--RP2
  |   |   |--desvarnames -----> {Q*, H2, Q1.2, H1.7, Q1.4, H1.4, Q1.7, H1.2, Q2, H*}
  |   |   |--Copula_pars -----> Le(s) paramètre(s) de la fonction copule choisie
  |   |   |--selected_copula -----> Le nom de la fonction copule choisie
  |   |   |--QH_Design -----> Les paires de débit-niveau d'eau correspondant soit aux 5 scénarios
choisis (indépendant) ou à la combinaison la plus probable (dépendant)
  |   |--RP100
  |   |   |--desvarnames -----> {Q*, H100, Q2, H50, Q5, H20, Q10, H10, Q20, H5, Q50, H2, Q100, H*}
  |   |   |--Copula_pars -----> Le(s) paramètre(s) de la fonction copule choisie
  |   |   |--selected_copula -----> Le nom de la fonction copule choisie
  |   |   |--QH_Design -----> Les paires de débit-niveau d'eau correspondant soit aux 7 scénarios choisis
(indépendant) ou à la combinaison la plus probable (dépendant)
  |   |--RP350
  |   |   |--desvarnames -----> {Q*, H350, Q3.74, H93.54, Q9.35, H37.42, Q18.71, H18.71, Q37.42, H9.35, Q93.54, H3.74, Q350, H*}
  |   |   |--Copula_pars -----> Le(s) paramètre(s) de la fonction copule choisi
  |   |   |--selected_copula -----> Le nom de la fonction copule choisi
  |   |   |--QH_Design -----> Les paires de débit-niveau d'eau correspondant soit aux 7 scénarios choisis
(indépendant) ou à la combinaison la plus probable (dépendant)

```

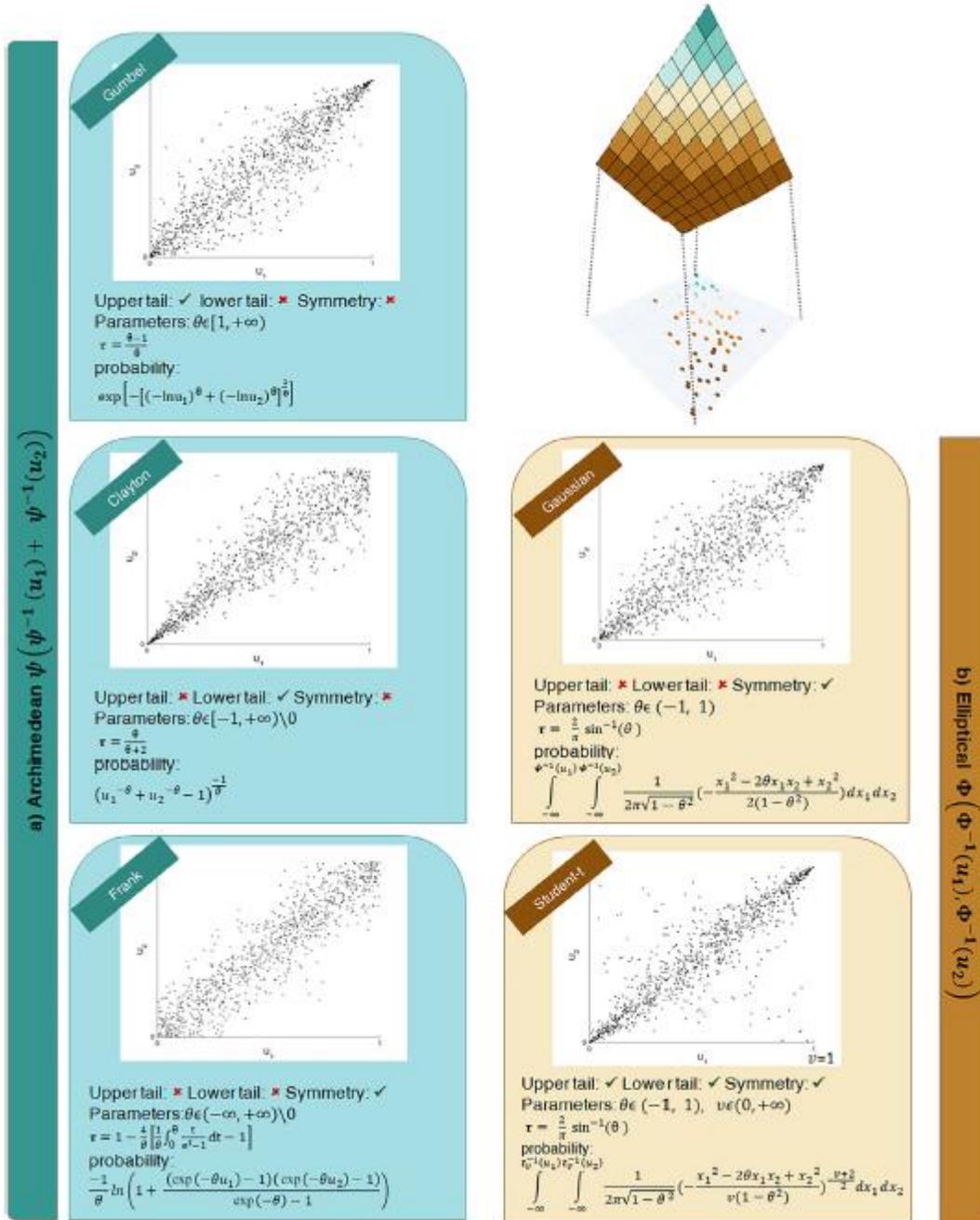
# RÉFÉRENCES

---

- Abberger, K. (2007). A simple graphical method to explore tail-dependence in stock-return pairs. *Http://Dx.Doi.Org/10.1080/0960310042000280429*, 15(1), 43–51. <https://doi.org/10.1080/0960310042000280429>
- Genest, C., & Boies, J. C. (2003). Detecting Dependence With Kendall Plots. *Http://Dx.Doi.Org/10.1198/0003130032431*, 57(4), 275–284. <https://doi.org/10.1198/0003130032431>
- Genest, C., & Favre, A.-C. (2007). Everything You Always Wanted to Know about Copula Modeling but Were Afraid to Ask. *Journal of Hydrologic Engineering*, 12(4), 347–368. [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1084-0699\(2007\)12:4\(347\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0699(2007)12:4(347))
- Genest, C., Nešlehová, J., & Quessy, J. F. (2011). Tests of symmetry for bivariate copulas. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 2011 64:4, 64(4), 811–834. <https://doi.org/10.1007/S10463-011-0337-6>
- Raftery, A. E. (1995). Bayesian Model Selection in Social Research. *Sociological Methodology*, 25, 111. <https://doi.org/10.2307/271063>
- Requena, A. I., Mediero, L., & Garrote, L. (2013). A bivariate return period based on copulas for hydrologic dam design: Accounting for reservoir routing in risk estimation. *Hydrology and Earth System Sciences*, 17(8), 3023–3038. <https://doi.org/10.5194/HESS-17-3023-2013>
- Sadegh, M., Moftakhari, H., Gupta, H. V., Ragno, E., Mazdiyasni, O., Sanders, B., Matthew, R., & AghaKouchak, A. (2018). Multihazard Scenarios for Analysis of Compound Extreme Events. *Geophysical Research Letters*, 45(11), 5470–5480. <https://doi.org/10.1029/2018GL077317>
- Salvadori, G., & De Michele, C. (2004). Frequency analysis via copulas: Theoretical aspects and applications to hydrological events. *Water Resources Research*, 40(12), 1–17. <https://doi.org/10.1029/2004WR003133>
- Tootoonchi, F., Sadegh, M., Haerter, J. O., Rätty, O., Grabs, T., Teutschbein, C., & Y W O R D S Copula, K. E. (2022). Copulas for hydroclimatic analysis: A practice-oriented overview. *Wiley Interdisciplinary Reviews: Water*, e1579. <https://doi.org/10.1002/WAT2.1579>

# Annexe A

Cette annexe présente les formes de dépendance entre les séries de pseudo-observations (T=0.75) de 5 copules, à savoir Gumbel, Clayton, Frank, Gaussian, et Student-t – tiré de Tootoonchi et al., (2022).





550 SHERBROOKE OUEST, TOUR OUEST, 19<sup>e</sup> ÉTAGE, MONTRÉAL, QC, CANADA, H3A 1B9 | TÉLÉPHONE 514 282.6464 | TÉLÉCOPIEUR 514 282.7131 | [WWW.OURANOS.CA](http://WWW.OURANOS.CA)